Lección 2

Procesos iterativos. El método de aproximaciones sucesivas.

2.1. Introducción

En términos coloquiales podemos decir que un proceso iterativo es un proceso que se alimenta a sí mismo, es decir, se trata de un proceso secuencial en el que en cada etapa se obtiene un resultado que se utiliza para obtener el resultado de la etapa siguiente. Muchos métodos matemáticos de solución exacta o aproximada de ecuaciones de diversos tipos (ecuaciones algebraicas, diferenciales, integrales...) son procesos iterativos. Entre los más conocidos se encuentran el método de Newton-Raphson para la solución de una ecuación $f(x)=0$ a partir de un valor inicial y el método de Picard para la solución de una ecuación diferencial ordinaria $x'=F(x,t)$ con condiciones iniciales dadas. Dichos métodos consisten en iterar una función g a partir de un valor inicial x_1 para formar la sucesión dada por $x_{n+1}=g(x_n)$. No pienses que este proceso se aplica solamente a sucesiones numéricas. En el método de Picard la función g es un operador que actúa sobre una función x y proporciona otra función $g(x)$. En condiciones bastante generales puede asegurarse que dicho método es convergente a una solución de la ecuación $x=g(x)$, es decir a un punto fijo de g, que es la solución exacta de nuestro problema $f(x)=0$. Naturalmente, hay que precisar qué se entiende por convergencia cuando la sucesión $x_{n+1}=g(x_n)$ sea una sucesión de funciones. Otra ventaja de este método es que permite con frecuencia dar cotas del error cometido al aproximar la solución exacta por el término x_n.

Estructura de la lección y objetivos

La lección está estructurada en dos partes:

- Sucesiones numéricas recurrentes.

  Estudiaremos algunos aspectos de las sucesiones numéricas recurrentes relacionados con su convergencia, con la existencia de puntos fijos y de puntos periódicos. Veremos con algunos ejemplos que estas sucesiones pueden ser muy regulares o muy sensibles a pequeñas variaciones de los datos iniciales y que pueden tener un comportamiento caótico.

- El método de las aproximaciones sucesivas.

  Nos situaremos en el contexto general de los espacios métricos completos para establecer el importante teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas. Haremos uso de este resultado para obtener soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La justificación de esta lección está en su interés matemático y computacional. Se trata de una lección eminentemente práctica aunque también permite motivar e introducir algunos conceptos importantes de Análisis Matemático. Estudiaremos algunos ejemplos muy bonitos de sucesiones recurrentes procurando establecer una estrecha relación entre los resultados teóricos y las prácticas con el programa *Mathematica* el cual usaremos con frecuencia porque en esta lección la visualización juega un papel muy importante.

Haremos dos prácticas relacionadas con esta lección. En la primera estudiaremos las iteraciones de la función cuadrática $f(x) = \lambda x(1-x)$ para distintos valores de λ lo que proporciona ejemplos sencillos de comportamientos caóticos. En la segunda de ellas estudiaremos la famosa sucesión de Fibonacci con distintas técnicas que pueden generalizarse para estudiar sucesiones recurrentes lineales. También estudiaremos iteraciones de punto fijo funcionales para obtener soluciones de diferentes tipos de ecuaciones funcionales.

Muchas de las ideas que siguen están tomadas del libro de Miguel de Guzmán *El rincón de la pizarra* (Ed. Pirámide, 1997). Otros libros que hay que agradecer a Miguel de Guzmán son *Para pensar mejor* (1994) y *Aventuras matemáticas* (1996), ambos en la misma editorial. Fuimos muchos los que encontramos en la amplia producción de Miguel de Guzmán dedicada a la divulgación y a la enseñanza de las matemáticas, el antídoto contra las matemáticas profundamente aburridas que llegaron a estar de moda hace algunos años. Miguel, cuya reciente pérdida todos los matemáticos lamentamos, nos enseñó que las matemáticas más útiles y más profundas son también las matemáticas más divertidas.

Sirvan estos apuntes de modestísimo homenaje a quien entendió las matemáticas como una aventura que hay que acometer con la curiosidad y la espontaneidad de los niños que preguntan incansables *"eso, ¿por qué?"* y no se conforman con teorías oxidadas y exigen que cada pregunta vaya seguida de un descubrimiento gozoso y . . . de nuevas preguntas.

2.2. Sucesiones numéricas recurrentes

Una sucesión cuyo término n-ésimo viene dado en función de algunos de los términos anteriores se dice que es una sucesión recurrente. Las llamadas "iteraciones de punto fijo" consistentes en iterar una función g a partir de un valor inicial x_1 para formar la sucesión dada por $x_{n+1} = g(x_n)$ son un ejemplo de sucesiones recurrentes. Otro ejemplo es la sucesión de Fibonacci definida por la condición de que cada término es igual a la suma de los dos anteriores $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, con $F_1 = F_2 = 1$. Este es un caso particular de una recurrencia de tipo lineal, es decir, de la forma

$$x_{n+p} = a_p x_{n+p-1} + a_{p-1} x_{n+p-2} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n$$

donde p es un número natural fijo y $a_0, a_1, \dots a_p$ son números complejos conocidos. Para las recurrencias de tipo lineal hay técnicas generales que, dados unos valores iniciales para $x_1, x_2, \dots x_p$, permiten calcular de forma explícita x_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Veremos ejemplos de estas técnicas en la práctica que dedicaremos a la sucesión de Fibonacci. Vamos a centrarnos ahora en el estudio de algunos aspectos de las iteraciones de punto fijo. Ya hemos visto ejemplos de tales sucesiones en la lección anterior al estudiar los conjuntos de Julia y de Mandelbrot. Empezaremos esta lección con una sucesión cuyo comportamiento es bastante sorprendente.

La sucesión $x_{n+1} = i^{x_n}$ con $x_1 = i$.

Esta sucesión se obtiene iterando la función $g(z) = i^z = \exp(z \log i) = \exp(iz\pi/2)$ a partir del valor inicial $x_1 = i$. En la figura 1.1 están representados los primeros treinta términos de esta sucesión donde cada término se ha unido con el siguiente por un segmento.

Puedes observar que la sucesión parece ser convergente a un número α próximo a `0.5 + 0.4`i y que se forman tres espirales que se aproximan a dicho número aunque los términos de la sucesión van saltando de una a otra espiral.

Como la función g es continua, el límite de la sucesión debe verificar que $\alpha = g(\alpha)$, es decir, $\alpha = \exp(\alpha i \pi/2)$. Calculamos dicho valor con *Mathematica* y obtenemos que $\alpha =$ `0.438283 + 0.360592`i.

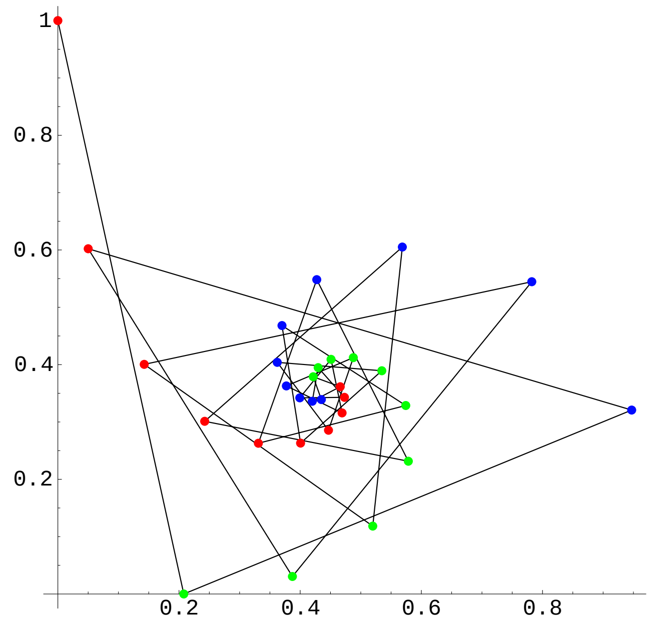

Figura 2.1: Los primeros 30 términos de $i^{i^{i^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

Para entender el comportamiento de la sucesión y justificar su convergencia podemos razonar como sigue. Observa que si z está cerca de α entonces $g(z)-g(\alpha)=g(z)-\alpha$ es aproximadamente igual a $g'(\alpha)(z-\alpha)$. Es decir, sustituir z por $g(z)$ en $z-\alpha$ tiene aproximadamente el mismo efecto que multiplicar $z-a$ por $g'(\alpha)$. Definamos $e_n=x_n-\alpha$. Entonces $e_{n+1}\simeq g'(\alpha)e_n$. Por tanto e_{n+1} se obtiene girando e_n un ángulo (en grados) igual a $\arg(g'(\alpha))\pi/180\simeq 129$. Deducimos que cada término de la sucesión está girado aproximadamente unos 129 grados respecto del anterior (con centro de giro en α). Eso explica que la gráfica aparezca como una triple espiral. Además $|e_{n+1}|\simeq|g'(\alpha)|\,|e_n|\simeq \mathtt{0.9}\,|e_n|$, lo que nos dice que la distancia de cada término de la sucesión al punto α disminuye en la proporción constante de 0.9 y, por tanto, $e_n\to 0$, esto es, $x_n\to\alpha$.

Visualización de sucesiones iterativas

Para estudiar una sucesión recurrente $x_{n+1}=g(x_n)$ de números reales es muy conveniente representar la función $y=g(x)$ y observar cómo se van obteniendo, a partir de un valor inicial x_1, los términos x_2, x_3, x_4,... de la sucesión. Para ello levantamos una vertical por $(x_1,0)$ hasta cortar a la gráfica $y=g(x)$ en $(x_1,g(x_1))=(x_1,x_2)$. Trazamos una horizontal desde ese punto hasta cortar a la recta $y=x$ en el punto (x_2,x_2). Repetimos el proceso: vertical por (x_2,x_2) hasta cortar a $y=g(x)$ en $(x_2,g(x_2))=(x_2,x_3)$ y horizontal desde este

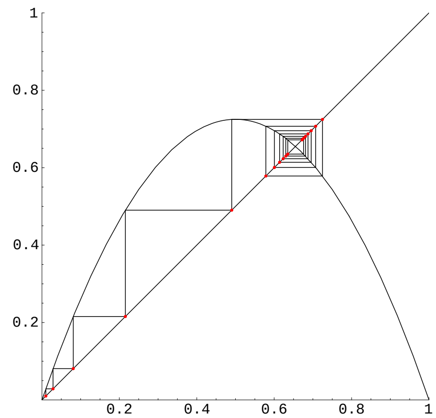

Figura 2.2: Los primeros 18 términos de $x_{n+1} = \mathtt{2.9} x_n(1 - x_n)$ con $x_1 = \mathtt{0.1}$

punto hasta cortar a la recta $y = x$ en (x_3, x_3)... El método es: vertical hasta la curva seguida de horizontal hasta la bisectriz. Puedes verlo en la figura 1.2 donde aparecen los primeros dieciocho puntos de la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ con $g(x) = \mathtt{2.9}x(1 - x)$ y $x_1 = \mathtt{0.1}$ representados en color rojo sobre la bisectriz. En este caso parece que la sucesión converge siendo su límite el único punto fijo de g distinto de 0 el cual, naturalmente, está en la intersección de la recta $y = x$ con la gráfica $y = g(x)$. Calculando el valor de dicho punto se obtiene que vale `0.655172` (para ser exactos 19/29). No es difícil comprobar que cualquiera sea el valor inicial que tomemos en el intervalo [0,1] el comportamiento de la sucesión será el mismo. En la figura 1.3 puedes ver los primeros trece términos de la sucesión partiendo del valor inicial $x_1 = \mathtt{0.9}$.

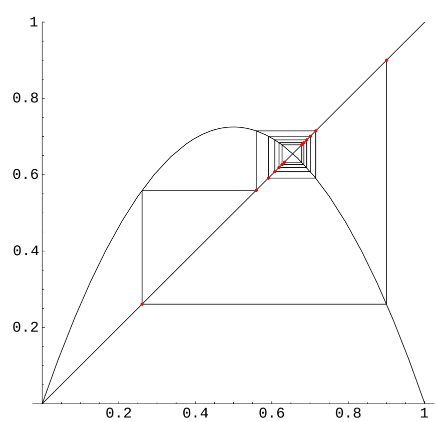

Figura 2.3: Los primeros 13 términos de $x_{n+1} = \mathtt{2.9} x_n(1 - x_n)$ con $x_1 = \mathtt{0.9}$

Pero si partimos de un valor inicial que no esté en el intervalo [0,1] se obtiene una sucesión divergente (figura 1.4).

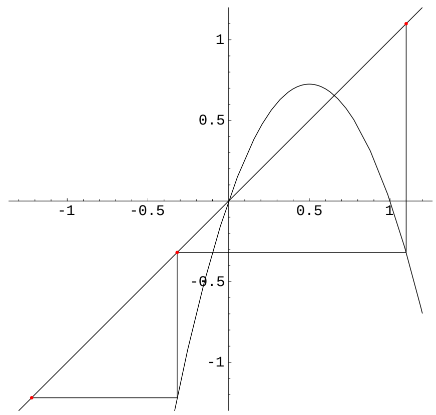

Figura 2.4: Los primeros 3 términos de $x_{n+1} = \texttt{2.9}x_n(1-x_n)$ con $x_1 = \texttt{1.1}$

El comportamiento de estas sucesiones puede ser muy complicado. En la figura 1.5 puedes ver los primeros 55 términos de la sucesión $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ con $x_1 = \texttt{0.2}$

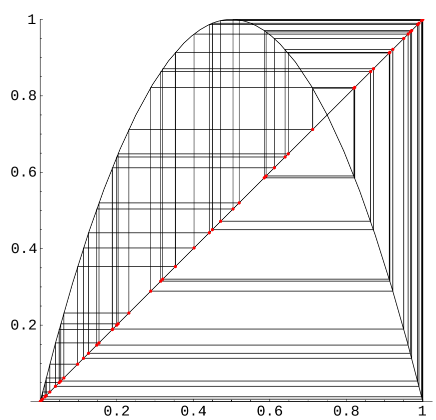

Figura 2.5: Los primeros 55 términos de $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ con $x_1 = \texttt{0.2}$

Puntos fijos y puntos periódicos

Si la función g tiene derivada continua y α es un punto fijo de g, en virtud del teorema del valor medio se verifica que:

$$g(x)-\alpha = g(x)-g(\alpha) = g'(c)(x-\alpha)$$

donde c es un punto comprendido entre x y α. Si x está próximo a α entonces también c estará próximo a α y, por la continuidad de la derivada, se tendrá que $g'(c) \simeq g'(\alpha)$ y por tanto:

$$g(x)-\alpha = g(x)-g(\alpha) \simeq g'(\alpha)(x-\alpha)$$

Si $|g'(\alpha)| < 1$ deducimos que $|g(x)-\alpha| \leqslant \rho\,|x-\alpha|$. Lo que, en términos de la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ se expresa por:

$$|x_{n+1}-\alpha| \leqslant \rho\,|x_n-\alpha| \qquad (0 \leqslant \rho < 1)$$

lo que implica que $|x_{n+1}-\alpha| \leqslant \rho^n\,|x_1-\alpha|$. Deducimos que la sucesión converge rápidamente a α cualquiera sea el valor inicial x_1 suficientemente próximo a α. Se dice que α es un *punto fijo atractivo*. En la figura 1.2 el punto fijo, $\alpha = \mathtt{0.655172}$, de $g(x) = \mathtt{2.9}x(1-x)$ es un punto fijo atractivo pues $|g'(\alpha)| = \mathtt{0.9}$.

Análogamente, si $|g'(\alpha)| > 1$ la sucesión no converge cualquiera sea el valor inicial x_1 suficientemente próximo a α y distinto de α. Se dice que α es un *punto fijo repelente*. En la figura 1.5 el punto fijo, $\alpha = \mathtt{0.75}$, de $g(x) = 4x(1-x)$ es un punto fijo repelente pues $|g'(\alpha)| = 2$.

Se dice que α es un *punto periódico* de g de *período* $k \geqslant 2$ cuando se verifica que α es un punto fijo de $g^k = g \circ \overset{k}{\cdots} \circ g$ (la composición de g consigo misma k veces) pero no es punto fijo de g^j para $1 \leqslant j \leqslant k-1$. Equivalentemente, en la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ con $x_1 = \alpha$ se verifica que $x_{k+1} = x_1$ y $x_j \neq x_1$ para $2 \leqslant j \leqslant k$. Observa que en tal caso también se verifica que $x_{n+k} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Los puntos fijos de g se consideran puntos periódicos con período 1.

Diremos que la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ con $x_1 = \alpha$ es *periódica* si alguno de sus términos (no necesariamente el primero) es un punto periódico para g. Observa que las sucesiones periódicas son muy regulares (figuras 1.6 y 1.7).

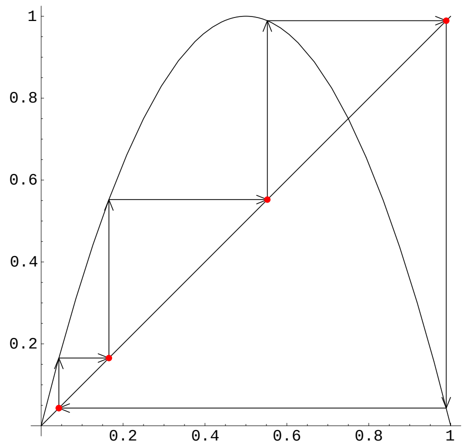

Figura 2.6: x_1 es periódico con período 4

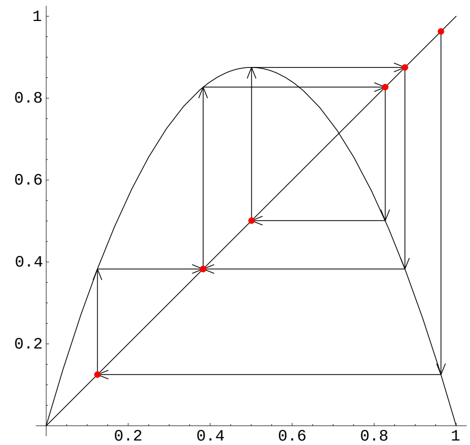

Figura 2.7: x_3 es periódico con período 4

Monotonía

La monotonía de la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ tiene poca relación con la monotonía de la función g (figuras 1.8 y 1.9).

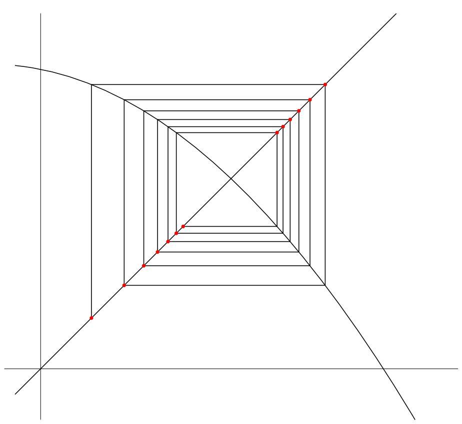

Figura 2.8: g decreciente, $x_{n+1} = g(x_n)$ no monótona.

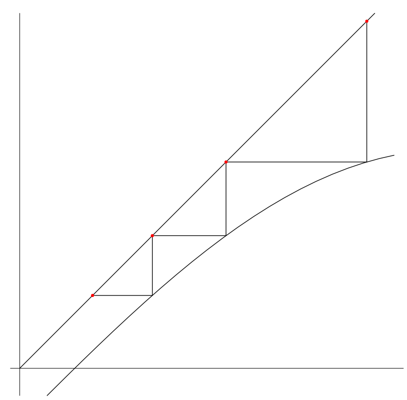

Figura 2.9: g creciente, $x_{n+1} = g(x_n)$ decreciente.

La desigualdad $x_{n+1} \geqslant x_n$ es lo mismo que $g(x_n) \geqslant x_n$, que equivale a $x_n \in \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geqslant x\}$. Análogamente $x_{n+1} \leqslant x_n$ equivale a $x_n \in \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leqslant x\}$. Por tanto, para estudiar la monotonía, podemos destacar los conjuntos:

$$\begin{aligned} A^+ &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geqslant x\} && \text{zona de } \textit{marcha adelante} \\ A^- &= \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leqslant x\} && \text{zona de } \textit{marcha atrás} \end{aligned}$$

Es claro que la sucesión $\{x_n\}$ será creciente (resp. decreciente) cuando todos sus términos a partir de uno de ellos en adelante estén en A^+ (resp. A^-). Cuando la sucesión no es monótona es porque tiene infinitos términos en A^+ e infinitos términos en A^-. Las zonas de salto de una región a otra son los conjuntos:

$$\begin{aligned} S^{+-} &= A^+ \cap \left\{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A^-\right\} && \text{zona de salto de } A^+ \text{ a } A^- \\ S^{-+} &= A^- \cap \left\{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A^+\right\} && \text{zona de salto de } A^- \text{ a } A^+ \end{aligned}$$

Acotación

Supongamos que $[a,b]$ es un intervalo para el que se verifica que $g([a,b]) \subseteq [a,b]$. En tal caso, si un término de la sucesión $\{x_n\}$ cae en $[a,b]$ todos los términos siguientes permanecen dentro de dicho intervalo. Gráficamente que $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ se traduce en que la gráfica de g en el intervalo $[a,b]$ queda dentro del cuadrado $[a,b] \times [a,b]$.

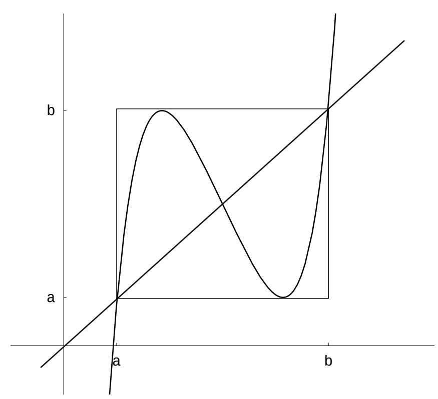

Figura 2.10: $(x, g(x)) \in [a,b] \times [a,b] \quad (a \leqslant x \leqslant b)$

Ejercicios

1. Estudia el comportamiento de la sucesión $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{3}{x_n}$, $x_1 = \alpha \neq 0$ para los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

2. Estudia el comportamiento de la sucesión $x_{n+1} = (x_n - 7)^2 + 6$, $x_1 = \alpha$ para los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Estudia el comportamiento de la sucesión $x_{n+1} = x_n{}^2 - 2$, $x_1 = \alpha$ para los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comportamiento caótico y *efecto mariposa*

Cuando la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ con $x_1 = \alpha$ no es convergente, ni divergente, ni periódica, ni presenta ningún tipo reconocible de regularidad se dice que tiene un comportamiento caótico. Ya hemos visto un ejemplo de dicho comportamiento en la figura 1.5 donde puedes ver cómo los términos de la sucesión están distribuidos de forma muy irregular llenando gran parte del intervalo $[0,1]$. Una característica frecuente de este comportamiento es la extremada sensibilidad con respecto a pequeños cambios en las condiciones iniciales; lo que se ha dado en llamar "efecto mariposa".

En los ejemplos anteriores hemos usado con frecuencia la función cuadrática $g(x) = ax(1-x)$ para distintos valores del parámetro a. Dedicaremos una clase práctica al estudio del comportamiento caótico de dicha función para ciertos valores del parámetro a. Acabaremos esta parte de la lección con un ejemplo del efecto mariposa. En la figura 1.11 se han representado los primeros mil términos de la sucesión $z_n = x_n - y_n$ donde $x_{n+1} = 3.9 x_n(1-x_n)$ con $x_1 = 0.4$ y $y_{n+1} = 3.9 y_n(1-y_n)$ con $y_1 = 0.400001$. Es decir $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ se obtienen iterando la función cuadrática con $a = 3.9$ tomando como valores iniciales respectivos `0.4` y `0.400001`. Pese a que dichos valores están muy próximos, las sucesiones obtenidas son completamente diferentes lo que se pone de manifiesto en el comportamiento de la sucesión $z_n = x_n - y_n$ que se muestra en la figura 1.11.

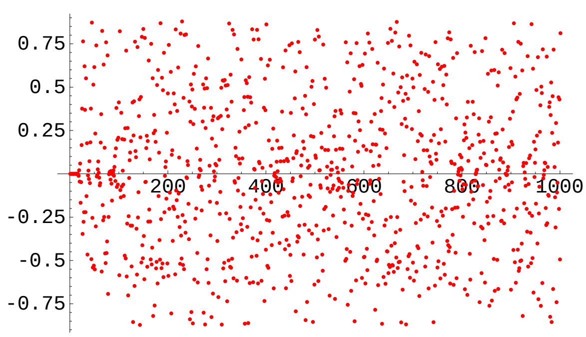

Figura 2.11: Efecto mariposa

2.3. El método de las aproximaciones sucesivas

Acabamos de ver que, en algunos casos, los términos de la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ para n suficientemente grande son soluciones aproximadas de la ecuación $g(x) = x$. Con frecuencia interesa considerar ecuaciones de la forma $g(x) = x$ donde x es una función que pertenece a un cierto espacio de funciones, digamos $\mathcal{X}$, y $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ es una aplicación de $\mathcal{X}$ en sí mismo. Un ejemplo sencillo de esto es el conocido problema de valores iniciales. Se trata de hallar una función, x, definida en un intervalo, I, con derivada continua y que verifique

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I, \quad x(a) = \alpha \tag{2.1}$$

donde suponemos que f es una función conocida de dos variables suficientemente buena y que a es un punto de I. La ecuación 1.1 puede escribirse de forma equivalente como:

$$x(t) = \alpha + \int_a^t f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in I \tag{2.2}$$

Lo que nos dice que x es un punto fijo de la aplicación

$$\begin{gathered} G : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I) \\ \varphi \in \mathcal{C}(I) \to G(\varphi) \in \mathcal{C}(I) \\ G(\varphi)(t) = \alpha + \int_a^t f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in I \end{gathered}$$

donde $\mathcal{C}(I)$ es el espacio de las funciones continuas en I. Siguiendo la analogía con el caso numérico, podemos partir de una función inicial $x_1 \in \mathcal{C}(I)$, tal que $x_1(a) = \alpha$, y formar la sucesión de funciones $x_{n+1} = G(x_n)$. Esto se conoce como *método de las iteraciones de Picard* para resolver el problema de valores iniciales dado. ¿Podemos esperar que esta sucesión converja a una solución de la ecuación 1.2? Para responder a esta pregunta tenemos que precisar qué se entiende por convergencia en este contexto. Fíjate que en $\mathcal{C}(I)$ podemos considerar distintos tipos de convergencia. Supongamos, por comodidad, que $I = [a, b]$. Aquí tienes dos posibles tipos de convergencia en $\mathcal{C}(I)$. Sea $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{C}(I)$:

$$\begin{aligned} \varphi_n \to \varphi &\Longleftrightarrow \text{máx}\,\{|\varphi_n(t) - \varphi(t)| : t \in [a, b]\} \to 0 \quad \text{(convergencia uniforme)} \\ \varphi_n \to \varphi &\Longleftrightarrow \int_a^b |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{(convergencia en media)} \end{aligned}$$

En el caso que estamos considerando la convergencia apropiada es la uniforme. ¿Podemos asegurar que la sucesión de funciones $x_{n+1} = G(x_n)$ converge uniformemente a una solución de la ecuación 1.2? Para ello hay que imponer algunas perfecciones a la función f. Observa que

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant \int_a^b |f(t, x_n(t)) - f(t, x_{n-1}(t))|\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

Supongamos que hay una constante $0 < k$ tal que se cumple la condición:

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant k\,|u-v|$$

Entonces de 1.3 deducimos fácilmente que:

$$\text{máx}\,\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)| : t \in [a,b]\} \leqslant k(b-a)\,\text{máx}\,\{|x_n(t) - x_{n-1}(t)| : t \in [a,b]\}$$

Si $\rho = k(b-a) < 1$, entonces poniendo, para $u,v \in \mathcal{C}(I)$, $d(u,v) = \text{máx}\,\{|u(t) - v(t)| : t \in [a,b]\}$, la desigualdad anterior se escribe:

$$d(G(x_n), G(x_{n-1}) \leqslant \rho\, d(x_n, x_{n-1}) \qquad (\rho < 1) \tag{2.4}$$

de donde se deduce, por ser $\rho < 1$, que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* para la convergencia uniforme. Ahora necesitamos un resultado teórico importante: una sucesión de Cauchy para la convergencia uniforme en el espacio $\mathcal{C}(I)$ es convergente en dicho espacio. Podemos por tanto asegurar que hay una función $x \in \mathcal{C}(I)$ tal que $\{x_n\}$ converge uniformemente a x. Las propiedades de la convergencia uniforme permiten ahora justificar el siguiente paso al límite:

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \alpha + \lim_{n\to\infty} \int_a^t f(s, x_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s = \alpha + \int_a^t \lim_{n\to\infty} f(s, x_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s = \alpha + \int_a^t f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$$

por lo que dicha función x es solución de 1.2 y, por tanto, de 1.1.

La situación considerada en el ejemplo anterior es tan frecuente que merece la pena abstraer sus componentes esenciales para establecer un resultado general que es el fundamento teórico que explica la convergencia de muchos procesos iterativos. Ya ves, a veces conviene demostrar un teorema. Nos situaremos en un ambiente suficientemente general e introduciremos sobre la marcha los conceptos necesarios.

Consideraremos un conjunto $\mathcal{X}$ que puedes interpretar como un conjunto de funciones. En el ejemplo considerado $\mathcal{X}$ era el espacio $\mathcal{C}[a,b]$ de las funciones continuas en $[a,b]$. Pero también puede ser el espacio $\mathcal{R}[a,b]$ de las funciones integrables en $[a,b]$, o el espacio $\mathcal{C}^1[a,b]$ de las funciones con primera derivada continua en $[a,b]$. La naturaleza del problema es la que en cada caso determina qué espacio debemos considerar.

En el conjunto $\mathcal{X}$ necesitamos tener un concepto de convergencia. Para ello es suficiente tener definido un concepto de *distancia* entre elementos de $\mathcal{X}$. Una distancia es simplemente una aplicación $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_0^+$ que a cada par de elementos $x,y \in \mathcal{X}$ asocia un número, $d(x,y) \geqslant 0$, que se interpreta como la distancia entre dichos elementos. Tal aplicación debe verificar las condiciones siguientes:

- $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

- $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría)
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (desigualdad triangular)

Ejemplos de distancias en $\mathcal{X} = \mathcal{C}[a,b]$ son:

- $d(x,y) = \text{máx}\{|x(t) - y(t)| t \in [a,b]\}$ (distancia uniforme)
- $d(x,y) = \displaystyle\int_a^b |x(t) - y(t)|\,\mathrm{d}t$ (distancia de la convergencia en media)

El par $(\mathcal{X},d)$ formado por un conjunto $\mathcal{X}$ y una distancia d definida en el mismo se llama un *espacio métrico*. Los elementos de un espacio métrico suelen llamarse *puntos* (¡aunque suelen ser funciones!). Una sucesión de puntos, $\{x_n\}$, de un espacio métrico $(\mathcal{X},d)$ se dice que es convergente si hay algún $x \in \mathcal{X}$ tal que $d(x_n,x) \to 0$. En tal caso el elemento x es único y se llama el límite de la sucesión. Observa que en un mismo conjunto para cada distancia tenemos su correspondiente convergencia. Naturalmente, puede ocurrir que sucesiones que converjan con una distancia no sean convergentes para otra distancia. Por ejemplo, la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por $f_n(x) = x^n$ es convergente en media a la función nula en el espacio $\mathcal{C}[0,1]$ pero dicha sucesión no es convergente con la distancia uniforme.

Volvamos a nuestro ejemplo inicial. En él construimos una sucesión para justificar que el problema de valores iniciales 1.1 tiene solución cuando se cumple la condición 1.4. Esta condición es la que garantiza que la sucesión construida converge. Observa que cuando se estudia la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$, lo que conocemos es, justamente, la sucesión y, naturalmente, se desconoce su posible límite el cual pudiera, incluso, no existir. Por ello interesa tener *criterios de convergencia intrínsecos a la sucesión*, es decir, que no hagan intervenir a un objeto en principio *extraño* a ella como es su posible límite. Por ejemplo, tú sabes que una sucesión monótona y acotada de números reales es convergente sin necesidad de conocer su límite. En espacios métricos abstractos el concepto de monotonía no tiene sentido pero sí lo tiene el siguiente concepto.

Definición 2.1. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico $(\mathcal{X},d)$ es una *sucesión de Cauchy*, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m, tal que para todos $p,q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m$ y $q \geqslant m$ se verifica que $d(x_p,x_q) < \varepsilon$.

Se dice que $(\mathcal{X},d)$ es un *espacio métrico completo* si toda sucesión de Cauchy en $(\mathcal{X},d)$ es convergente en $(\mathcal{X},d)$.

El espacio métrico $\mathcal{C}[a,b]$ con la distancia uniforme es completo pero $\mathcal{C}[a,b]$ no es completo con la distancia de la convergencia en media.

Tenemos ya todos los elementos necesarios para entender el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Sea* $(\mathcal{X},d)$ *un espacio métrico completo y* $G:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ *una aplicación contractiva, es decir, verificando que existe un número* $0<\rho<1$ *tal que para todos* $u,v\in\mathcal{X}$ *es*

$$d(G(u),G(v))\leqslant\rho\, d(u,v). \tag{2.5}$$

Entonces G *tiene un único punto fijo, es decir existe un único* $x\in\mathcal{X}$ *tal que* $G(x)=x$. *Además, dado un punto cualquiera* $x_1\in\mathcal{X}$, *la sucesión definida por* $x_{n+1}=G(x_n)$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$ *es convergente, su límite es el punto fijo de* G *y*

$$d(x_{n+1},x)\leqslant\frac{\rho^n}{1-\rho}d(x_1,G(x_1))$$

Demostración. Sea $x_1\in\mathcal{X}$. Probaremos que la sucesión definida por $x_{n+1}=G(x_n)$ es convergente. Como, por hipótesis, $(\mathcal{X},d)$ es un espacio métrico completo, será suficiente probar que dicha sucesión es una sucesión de Cauchy. Usando la hipótesis 1.5 tenemos que para $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 2$:

$$\begin{aligned} d(x_{k+1},x_k)&=d(G(x_k),G(x_{k-1}))\leqslant\rho\, d(x_k,x_{k-1})=\rho\, d(G(x_{k-1}),G(x_{k-2}))\leqslant\\ &\leqslant\rho^2 d(x_{k-1},x_{k-2})\leqslant\cdots\leqslant\rho^{k-1}d(x_2,x_1)\end{aligned}$$

Es decir $d(x_{k+1},x_k)\leqslant\rho^{k-1}d(x_2,x_1)$. Usando esta desigualdad, para $p,n\in\mathbb{N}$ con $p\geqslant 2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x_{n+p},x_p)&\leqslant d(x_{n+p},x_{n+p-1})+d(x_{n+p-1},x_p)\leqslant\\ &\leqslant d(x_{n+p},x_{n+p-1})+d(x_{n+p-1},x_{n+p-2})+d(x_{n+p-2},x_p)\leqslant\\ &\leqslant d(x_{n+p},x_{n+p-1})+d(x_{n+p-1},x_{n+p-2})+d(x_{n+p-2},x_{n+p-3})+\cdots+d(x_{p+1},x_p)\leqslant\\ &\leqslant(\rho^{n+p-2}+\rho^{n+p-3}+\rho^{n+p-4}\cdots+\rho^{p-1})d(x_2,x_1)\leqslant\rho^{p-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\right)d(x_2,x_1)=\\ &=\frac{\rho^{p-1}}{1-\rho}d(x_2,x_1)\end{aligned}$$

Donde hemos usado que, por ser $0<\rho<1$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j$ es una serie geométrica convergente. Hemos probado que

$$d(x_{n+p},x_p)\leqslant\frac{\rho^{p-1}}{1-\rho}d(x_2,x_1)\qquad\forall p,n\in\mathbb{N},\ p\geqslant 2.$$

De la desigualdad anterior se deduce fácilmente que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon>0$ elegimos $m\in\mathbb{N}$ por la condición de que $\dfrac{\rho^{m-1}}{1-\rho}d(x_2,x_1)<\varepsilon$. Si ahora p,q son números naturales mayores que m, la desigualdad anterior implica que

$$d(x_q,x_p)\leqslant\frac{\rho^{m-1}}{1-\rho}d(x_2,x_1)<\varepsilon$$

Hemos probado así que existe un elemento $x \in \mathcal{X}$ tal que $\{x_n\}$ converge a x. Deducimos, por la continuidad de G (la cual es consecuencia de 1.5), que:

$$x = \lim x_{n+1} = \lim G(x_n) = G(\lim x_n) = G(x)$$

Por tanto x es un punto fijo de G. Si y es un punto fijo de G, de la desigualdad 1.5 se deduce que:

$$d(x,y) = d(G(x), G(y)) \leqslant \rho\, d(x,y)$$

y, como $\rho < 1$ esta desigualdad implica que $d(x,y) = 0$, es decir, $x = y$. Luego G tiene un único punto fijo. Finalmente:

$$d(x_{n+1},x) = d(G(x_n),G(x)) \leqslant \rho\, d(x_n,x) = \rho\, d(G(x_{n-1}),G(x)) \leqslant \tag{2.6}$$

$$\leqslant \rho^2 d(x_{n-1},x) \leqslant \cdots \leqslant \rho^n d(x_1,x) \tag{2.7}$$

Pero

$$d(x_1,x) \leqslant d(x_1,G(x_1)) + d(G(x_1),x) = d(x_1,G(x_1)) + d(G(x_1),G(x)) \leqslant d(x_1,G(x_1)) + \rho\, d(x_1,x)$$

de donde se sigue que

$$d(x_1,x) \leqslant \frac{1}{1-\rho} d(x_1,G(x_1))$$

lo que, por la desigualdad 1.6, implica que

$$d(x_{n+1},x) \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho} d(x_1,G(x_1)).$$

□

Después de establecer un resultado en un contexto abstracto es conveniente "descender" para ver lo que dicho resultado aporta en una situación familiar concreta.

Corolario 2.3. *Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ una función derivable en el intervalo $[a,b]$ y supongamos que hay un número $0 < \rho < 1$ tal que $|g'(x)| \leqslant \rho$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces g tiene un único punto fijo $x \in [a,b]$ y cualquiera sea el punto $x_1 \in [a,b]$ la sucesión dada por $x_{n+1} = g(x_n)$ converge al punto fijo de g y $|x_{n+1} - x| \leqslant \dfrac{\rho^n}{1-\rho} |x_1, g(x_1)|$.*

Demostración. Se aplica el resultado anterior con $\mathcal{X} = [a,b]$ que es un espacio métrico completo con la distancia usual $d(x,y) = |x-y|$. Basta tener en cuenta que, por el teorema del valor medio, para todos $u,v \in [a,b]$ se verifica que $g(u) - g(v) = g'(c)(u-v)$ donde c es un punto comprendido entre u y v. Tomando valor absoluto en esta igualdad y teniendo en cuenta que $|g'(c)| \leqslant \rho$, se deduce que

$$|g(u) - g(v)| \leqslant \rho\, |u-v|$$

Por tanto, g es una aplicación contractiva. $\square$

Podemos usar este resultado para obtener condiciones de convergencia para el método de Newton-Raphson.

Corolario 2.4. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función con derivada segunda continua en $[a,b]$. Supongamos que existe algún punto $p \in]a,b[$ tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que el único cero de f en $[p-\delta, p+\delta]$ es p y cualquiera sea el punto $x_1 \in [p-\delta, p+\delta]$ la sucesión dada por*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge a p.

Demostración. Como $f'(p) \neq 0$ y f' es continua, existirá un intervalo abierto $J \subset [a,b]$ que contiene al punto p en el cual no se anula la derivada de f. Pongamos $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, función que estará definida para $x \in J$. Calculando su derivada tenemos que:

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Como $f(p) = 0$ y f'' es continua, se deduce que existe un número $\delta > 0$ tal que el intervalo $[p-\delta, p+\delta] \subset J$ y $|g'(x)| \leqslant 1/2$ para todo $x \in [p-\delta, p+\delta]$. En tal caso, como $g(p) = p$, tenemos también que:

$$|g(x) - p| = |g(x) - g(p)| \leqslant \frac{1}{2}|x-p| \leqslant \frac{1}{2}\delta < \delta \qquad \forall x \in [p-\delta, p+\delta]$$

Estamos, pues, en condiciones de aplicar el corolario anterior a la función g en el intervalo $[p-\delta, p+\delta]$ de donde fácilmente se siguen las afirmaciones del enunciado. $\square$